FUNGSI DAN GRAFIK FUNGSI

- Apabila suatu besaran y memiliki nilai yang tergantung dari nilai besaran lain x, maka dikatakan bahwa besaran y tersebut merupakan fungsi besaran x.

secara umum ditulis:

$$y = f(x)$$

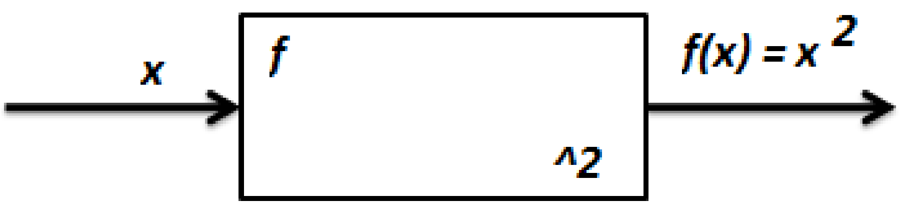
- penulisan **y = f (x)** bukan berarti y sama dengan f kali x, melainkan untuk menyatakan bahwa **y merupakan fungsi dari x** yang tidak lain adalah sebuah aturan atau sebuah ketentuan berapakah y akan memiliki nilai jika kepada x kita berikan suatu nilai.
- Y = peubah tak bebas (ko-domain atau daerah hasil)

  x = peubah bebas (doman atau daerah asal)

Suatu fungsi dapat digambarkan dalam diagram berikut:

contoh:

1. $y = x^2$



Fungsi f memangkatkan inputnya dengan 2

2. $y = x-6$

Fungsi f mengurangkan Inputnya dengan 6

3. y = 4x

Fungsi f mengalikan inputnya Dengan 4

4. y = sin x

Fungsi f menghasilkan sinus inputnya

Menentukan domain dan ko-domain

Contoh 1:

Diketahui suatu fungsi berikut dengan x maupun y merupakan bilangan real.

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

Tentukan domain dan ko-domain nya!

Jawaban:

domain: $-1 \le x \le 1$

penjelasan : karena pada rentang nilai tersebut satu-satunya nilai **x** yang untuknya **y** memiliki nilai real.

kodomain: $0 \le y \le 1$

penjelasan: karena 0 dan 1 merupakan nilai minimum dan maksimum **y** diseluruh domain tersebut.

Contoh 2:

Tentukan domain dan kodomain fungsi berikut:

$Y = x^3$, $-2 \leq x < 3$

(fungsi ini didefinisikan hanya untuk set nilai x terbatas yang diketahui)

Jawaban:

Domain: $-2 \leq x < 3$

Kodomain: $-8 \leq x < 27$

Fungsi-fungsi dan operasi aritmetik

- Fungsi-fungsi dapat digabung dengan bantuan operasi aritmetik asalkan dilakukan dengan cermat di dalam domain persekutuannya.
- Contoh:

  jika **$f(x) = x^2 – 1, -2 \le x < 4$** dan **$g(x) = 2/(x+3), 0<x<5$**, maka tentukan domain dari

  $h(x) = f(x) + g(x)$

  jawab:

  $0 < x < 4$

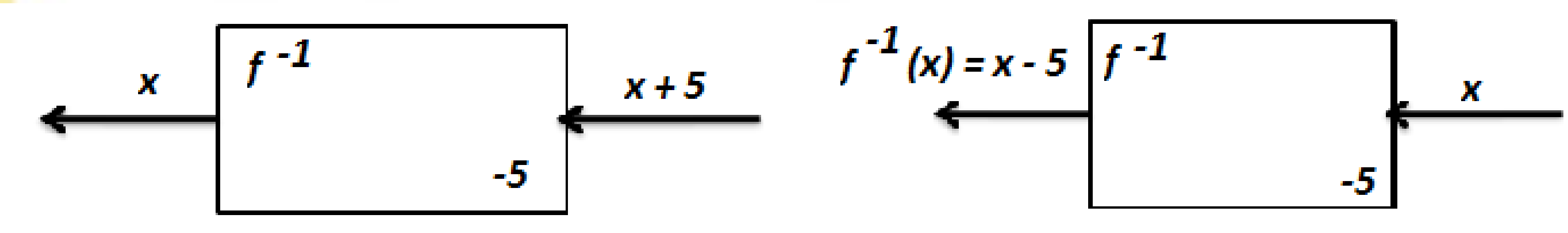
  penjelasan: karena **$g(x)$** tidak terdefinisikan untuk $-2 \le x \le 0$ dan **$f(x)$** tidak terdefinisikan untuk $4 \le x \le 5$. jadi $0 < x < 4$ merupakan persekutuan dari keduanya **($h(x)$).**

Invers Fungsi

- Proses yang menghasilkan output pada fungsi dianggap reversibel sehingga apa yang telah dikonstruksi dapat pula didekonstruksi.
- Pengaruh ini dapat dijabarkan dengan membalikkan aliran informasi melalui diagram berikut:

$y = f(x) = x + 5$

Alirannya dibalik dengan membuat output menjadi input dan mencari input aslinya sebagai output baru:



Aturan yang menguraikan proses terbalik ini disebut invers fungsi (f^{-1})

Jadi $y = f(x) = x + 5 \rightarrow$ inversnya adalah $f^{-1}(x) = x - 5$

- Berapakah f-1(x) dalam masing-masing fungsi berikut?

a. $f(x) = 6x$ b. $f(x) = x^3$ c. $f(x) = x/2$

Jawaban:

a. $f^{-1}(x) = x/6$
b. $f^{-1}(x) = x^{1/3}$
c. $f^{-1}(x) = 2x$

Oleh karena itu dapat disimpulkan:

Penambahan dan pengurangan merupakan invers satu sama lain.

Perkalian dan pembagian merupakan invers satu sama lain.

Memangkatkan dengan *a* dan memangkatkan dengan *1/a* merupakan invers satu sama lain.

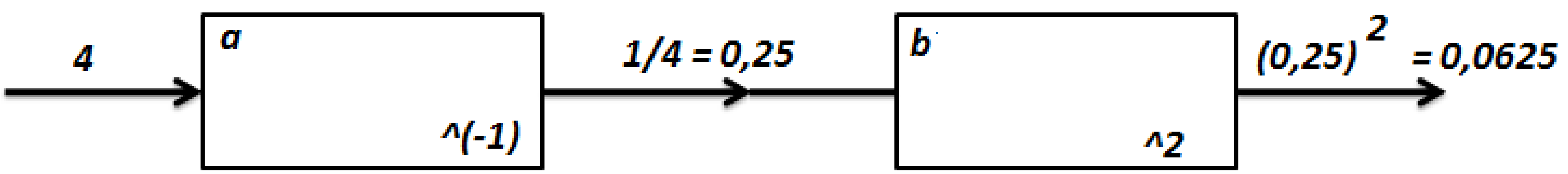
Komposisi 'fungsi dari fungsi'

- Contoh:

  f dikomposisi dari ***a*** dan ***b*** dimana $\boldsymbol{a(x) = 1/x}$, $\boldsymbol{b(x) = x^2}$ dan $\boldsymbol{f(x) = (1/x)^2}$

- ***f*** merupakan komposisi ***a*** dan ***b***, yang ditulis sebagai:

  f = b o a → dibaca ***b*** dari ***a***



- ***f(x) = b o a (x)*** → *dibaca sebagai f dari x sama dengan b dari a dari x.*
- Notasi yang lazim digunakan ialah:

  $f(x) = b[a(x)]$

  dan f diuraikan sebagai fungsi dari suatu fungsi.

❖ Soal:

diketahui bahwa $a(x) = x + 3$, $b(x) = 4x$, carilah fungsi f dan g dengan:

a. $f(x) = b[a(x)]$ b. $g(x) = a[b(x)]$

Jawaban:

a. $f(x) = 4x + 12$

b. $g(x) = 4x + 3$

- Diketahui 3 fungsi a, b, dan c dengan $a(x) = x^3$, $b(x) = 2x$, dan $c(x) = \tan x$. Tentukanlah fungsi-fungsi berikut:

a. $f(x) = a(b[c(x)])$

b. $g(x) = c(a[b(x)])$

c. $h(x) = a(a[c(x)])$

FUNGSI TRIGONOMETRI

Periode

- Sembarang fungsi yang outputnya berulang dalam selang teratur inputnya disebut **fungsi periodik.** Selang teratur input tersebut dinamakan **periode** fungsi tersebut.
- Dari grafik fungsi trigonometrik dapat dilihat bahwa:

  baik fungsi sinus maupun cosinus berulang bentuk pada setiap **2π** radian.

  oleh karena itu: $\sin x = \sin (x + 2\pi)$

Contoh:

$\sin 3\theta = \sin(3\theta + 2\pi)$

$= \sin 3(\theta + 2\pi/3)$

Jadi periodenya: $2\pi/3$

Alasan: karena terdapat selang θ yang lebih kecil yang pada selang itu bentuk sinusoidal dasar akan berulang bentuk.

Sin 3θ pasti akan berulang bentuk dalam 2π tetapi dalam 2π bentuk sinusoidal dasar akan berulang 3 kali.

AMPLITUDO

- Setiap fungsi periodik memiliki suatu amplitudo yang diberikan sebagai selisih antara nilai maksimum dan nilai rata-rata output yang diperoleh dalam periode tunggal.
- Contoh:

  nilai rata-rata output dari fungsi cosinus sama dengan nol (nilai ini berkisar di antara +1 dan 1) dan nilai output maksimum sama dengan +1, jadi amplitudonya sama dengan 1 – 0 = 1

Atau dapat pula dikatakan bahwa amplitudo adalah setengah kali jarak antara nilai maksimum dan nilai minimum

Berapakah Amplitudo dari:

1. $4 \cos (2\theta - 3) = \ldots$?

Jawab:

amplitudo = 4

2. $y = 4\sin 2x$

3. $y = 5 + 2\sin x$

Fungsi periodik tidak selalu merupakan fungsi trigonometrik.

Contoh: gelombang gigi gergaji

Fungsi dengan grafik yang ditunjukkan pada diagram di bawah ini juga periodik.

Keterangan:

Cabang garis lurus antara $x = 0$ dan $x = 1$ berulang secara tak tentu.

Untuk $0 \leq x < 1$ output dari f diberikan sebagai $f(x) = x$.

Output dari f untuk $1 \leq x < 2$ sesuai dengan output untuk $0 \leq x < 1$. Dengan kata lain:

$f(x + 1) = f(x)$ untuk $0 \leq x < 1$

Jadi sebagai contoh $f(1,5) = f(0,5 + 1) = f(0,5) = 0,5$

Output dari f untuk $2 \leq x < 3$ juga cocok dengan output untuk $0 \leq x < 1$. Dengan kata lain:

$f(x + 2) = f(x)$ untuk $0 \leq x < 1$

Jadi misalnya $f(2,5) = f(0,5 + 2) = f(0,5) = 0,5$

- Ini berarti bahwa kita dapat memberi keterangan untuk fungsi sebagai:

  $f(x) = x$ untuk $0 \leq x < 1$

  $f(x + n) = f(x)$ untuk sembarang bilangan bulat n

Untuk fungsi periodik jenis ini dengan periode P yang padanya cabang pertama fungsi itu diberikan untuk $a \leq x < a + P$ dapat dikatakan bahwa:

  $f(x)$ = suatu rumusan dalam x untuk $a \leq x < a + P$

  $f(x + nP) = f(x)$

  amplitudo gelombang gigi gergaji ini = 1/2

BEDA FASE

- Beda fase fungsi periodik adalah selang input yang dengan itu output mendahului atau terlambat terhadap fungsi acuan.
- Contoh:

  $y = \sin x$ dan $y = \sin(x + \pi/4)$

  $y = \sin(x + \pi/4)$ memiliki bentuk yang identik dengan $y = \sin x$ tetapi mendahului $y = \sin x$ sebesar $\pi/4$ radian.

Persamaan Trigonometri

- Contoh persamaan trigonometri sederhana:

  $\sin 3x = 0$

  penyelesaian persamaan ini dapat dicari dari pemeriksaan grafik fungsi sinus $\sin \theta$ yang memotong sumbu θ apabila θ merupakan kelipatan bulat dari π.

  dengan kata lain $\sin n\pi = 0$ dengan n merupakan bilangan bulat.

  ini berarti bahwa penyelesaian dari $\sin 3x = 0$ diperoleh apabila:

  $3x = n\pi$ sehingga $x = n\pi /3 \rightarrow n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

- Jadi nilai x yang memenuhi persamaan trigonometri sederhana untuk:

  $\cos 2x = 1$ adalah ....

  jawab:

  $x = n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

  karena:

  dari grafik fungsi cosinus dapat dilihat bahwa grafik naik ke maksimumnya $\cos \theta = 1$ setiap θ kelipatan genap dari π, yaitu: $\theta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$

  oleh karenanya $\cos 2x = 1$ bila $2x = 2n\pi$ sehingga $x = n\pi$, dimana nilai $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Persamaan yang berbentuk $a \cos x + b \sin x = c$

- $F(x) = a \cos x + b \sin x$ terhadap x akan menghasilkan grafik sinusoidal
- $f(x) = 3 \cos x + 4 \sin x$ terhadap x untuk $-10 \leq x \leq 10$ dengan nilai antara (step value).

  bentuk sinusoidal yang dibentuk oleh fungsi tersebut memiliki amplitudo dan fase, jadi persamaannya haruslah berbentuk:

  $f(x) = R \sin (x + \theta)$ atau $f(x) = R \cos (x + \phi)$

- Dari bentuk tersebut dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan:

  $3 \cos x + 4 \sin x = 5$

  dengan kata lain:

  $R \sin (x + \theta) = 5$

  sisi kiri dapat diuraikan:

  $R \sin \theta \cos x + R \cos \theta \sin x = 5$

Dengan membandingkan persamaan ini dengan persamaan $3 \cos x + 4 \sin x = 5$ maka dapat dikatakan bahwa:

$3 = R \sin \theta$ dan $4 = R \cos \theta$

Sekarang:

$R^2 \sin^2 \theta + R^2 \cos^2 \theta = R^2 = 3^2 + 4^2 = 25 = 5^2$

Sehingga R = 5. Ini berarti bahwa:

$5 \sin (x + \theta) = 5$ sehingga:

$\sin (x + \theta) = 1$ dengan penyelesaian $x + \theta = \pi/2 + 2n\pi$

Dengan demikian:

$X = \pi/2 - \theta \pm 2n\pi$

Sekarang, $R \sin \theta / R \cos \theta = \tan \theta = ¾$ sehingga $\theta = \arctan (3/4) = 0{,}64$ rad.

Ini akan menghasilkan penyelesaian untuk persamaan aslinya sebagai:

$X = \pi/2 – 0{,}64 \pm 2n\pi = 0{,}93 \pm 2n\pi$

- π radians = 180°
- 1 radian = 180°/π = 57.2958°

Degrees	Radians (exact)	Radians (approx)
30°	$\pi/6$	0.524
45°	$\pi/4$	0.785
60°	$\pi/3$	1.047
90°	$\pi/2$	1.571
180°	π	3.142
270°	$3\pi/2$	4.712
360°	2π	6.283